

Autosimilarité et mémoire longue : Les rendements des indices boursiers tunisiens sont-ils chaotiques ?



Monia ANTAR

Maître assistante es Finance

Institut Supérieur de Commerce et de Comptabilité de Bizerte, Université de Carthage (Tunisie).

monia.antar@gmail.com

Résumé

La Finance fractale est venue au secours des modèles linéaires classiques incapables de caractériser les processus complexes et d'expliquer les anomalies boursières. La caractérisation des séries financières est toujours d'actualité. Le calcul de l'exposant de Hurst, de la dimension fractale, de l'exposant de Lyapunov, de la fenêtre de Theiler et la réalisation du test de déterminisme, nous ont permis de mieux appréhender la dynamique des rentabilités des 15 indices cotés sur la Bourse de Tunis. Les résultats montrent que les rentabilités ne sont pas linéaires, suivent des lois alphastables, présentent une mémoire longue avec une corrélation positive mais ne sont toutefois pas chaotiques. L'hypothèse d'un mouvement fractal brownien est privilégiée.

Mots clés : Fractale, coefficient de Hurst, Lyapunov, Chaos, fenêtre de Theiler, test de déterminisme, Bourse de Tunis

Abstract

Fractal Finance came to the rescue of the classical models unable to explain financial anomalies and of linear models inadequate to characterize complex processes. The characterization of financial series is still topical. The calculation of the Hurst exponent, the fractal dimension, the Lyapunov exponent, the window of Theiler and the realization of the determinism test, have allowed us to better understand the dynamics of the Tunisian indexes returns. The results show that the returns are not linear, follow alpha-stable laws, have a long memory but are not chaotic. The hypothesis of a Brownian fractal motion is privileged.

Key words: Fractals, Hurst exponent, Lyapunov, Chaos, window of Theiler, determinism test, Tunis stock exchange

Introduction

Cet article dresse une revue des critiques faites aux hypothèses sous-jacentes aux modèles de la finance orthodoxe et tente de vérifier si les rentabilités des indices boursiers tunisiens sont caractérisés par un comportement chaotique. Si tel est le cas, le processus est non linéaire, sensible aux conditions initiales et caractérisé par la présence d'un attracteur spécifique¹ El Haddad (2016).

La théorie du chaos permet d'avoir de l'ordre dans le désordre. Elle part du rejet de l'efficacité et de l'irrationalité des investisseurs. Dans la théorie classique, les chocs permettent les variations de prix, alors que le hasard sauvage fait partie intégrante du processus chaotique.

La littérature est divisée. Il y a ceux qui supportent l'existence d'un chaos déterministe Ryane (2014) sur la Bourse marocaine, Lin (2014) sur la bourse suédoise, Blank (1991) sur l'indice S&P500. Hacinliyan et Kandiran (2015) sur la bourse turque.

D'autres l'infirmement comme Girerd-Potin (1994) sur l'indice français SBF, El Haddad (2016) sur la bourse de Casablanca, McKenzie (2001) sur les principaux indices de 10 pays dont l'Allemagne, la France la Suisse et Hong Kong. De même, dans un article de revue Sewel (2008) conclue que l'utilisation de la théorie du chaos en dehors des sciences physiques, est inopportune et en se basant sur 21 articles, il conclut l'existence d'une faible évidence du chaos sur les marchés financiers. Hołyst et al (2001) présente un résultat mitigé en concluant que les dynamiques économiques réelles sont un mélange entre chaos déterministe et stochastique.

Cet article vérifiera la non normalité, la non linéarité, l'existence d'une structure fractale et d'un processus chaotique sur les rentabilités des 15 indices cotés sur la Bourse de Tunis.

Socle de la finance orthodoxe et remise en cause de ses hypothèses

La valeur fondamentale fût la première notion apportée pour expliquer le risque. Le mot d'ordre était le « parce que », car nous sommes plus doués pour expliquer que pour comprendre et d'accepter le risque. Ensuite, l'analyse technique est apparue. Une astrologie financière qui peut marcher de temps à autre mais qui ne peut en aucun cas être considéré comme un moyen de gestion globale du risque. Avec la thèse de Bachelier, la marche aléatoire va structurer la finance moderne.

¹ Un attracteur est une forme géométrique vers la quelle converge toutes les trajectoires du système dynamique.

On ne peut pas prévoir si les prix vont monter ou descendre mais on peut connaître l'ampleur de cette variation. Fama découvrit par la suite que l'espérance mathématique du spéculateur est nulle et introduit l'hypothèse d'efficience des marchés. Le système produit sa première incohérence par le paradoxe de Grossam et Stiglitz en 1980. Avec la théorie du portefeuille, Markovitz mettra en balance rentabilité et risque et surtout corrélation entre les rentabilités des divers actifs. Le défaut majeur du modèle est qu'il nécessite énormément de calcul. Chose qui sera très vite rétablie avec le modèle à un facteur de William Sharpe. Chaque action a son beta, on n'évalue plus chaque action en la comparant à toutes les autres mais au marché ! Le CAPM est récompensé par un prix Nobel en 1990. Une innovation importante viendra avec les travaux de Ross en 1976 lorsqu'il introduit l'APT. Il n'y a plus un seul beta mais plusieurs et l'on peut intégrer autant de facteurs que l'on désire. Plus tard viendra le fameux modèle de Black and Scholes nous permettra de spéculer sur la volatilité et ouvrira la voie à l'ingénierie financière. C'est le règne de la Finance. Enfin, pour ne pas oublier, B&S est correct à condition que vous supposiez la pertinence de la courbe en cloche pour décrire convenablement les mouvements des cours, la rigueur de la variance comme mesure du risque et que les cours varient de manière continue et indépendamment des évolutions passées Mandelbrot (2009).

Tout va pour le mieux jusqu'au crash de 1987. Un événement dont la probabilité est de un sur un zillion. D'autres turbulences financières suivirent dans les années 90, et des variations de plus de 25 écart-types sont observés! Quelque chose ne va pas. Une erreur dans les modèles ? Les anciennes théories ne sont plus bien respectées. Toutes les discordances avec le CAPM sont appelées anomalies. En 1992, Fama et French annoncent la mort du Béta et présentent le modèle à trois facteurs. On améliore les choses mais on ne sort pas du cadre gaussien. De même, lorsqu'il devient clair que la volatilité n'est pas constante, Engle développe dans les années 80 le modèle GARCH et reçoit le prix Nobel en 2003. Par ailleurs, on dit toujours que la cause de la crise financière est l'avidité. Mais l'avidité existe également lors de l'octroi des marchés publics. Toutefois les ponts et les immeubles ne tombent à la première attaque sismique. C'est ce qui manque à la finance, une juste perception des risques et une remise en cause des modèles classique. Qui plus est, un accident très révélateur est celui du hedge fund LTCM² géré par Scholes et Merton qui fait faillite en 1998, soit un an après que les deux professeurs eurent le prix Nobel.

Il n'en fait plus aucun doute que le socle de la finance est à revoir. La remise en cause de la théorie nécessite que nous commençons par examiner les hypothèses qui la sous-tendent.

² Long Term Capital Management, un hedge fund créée en 1994.

La rationalité de l'homo economicus est fortement critiquée. Avec le développement de la théorie des perspectives, Kahneman et Tversky ont organisé toutes les exceptions à la théorie de vNM et ont essayé de modéliser le comportement réel de l'individu. L'homogénéité est également à rejeter. Les investisseurs sont très différents. Les fonds de pensions peuvent garder leurs actions pendant des décennies alors que d'autres investisseurs liquident leur position au plus tard dans la journée. Ensuite quand on parle des variations i.i.d. des cours cela suppose l'indépendance, la stationnarité et la normalité des variations. L'indépendance signifie qu'en plus des variations bien dociles des prix, chaque fluctuation est indépendante de la précédente. Toute l'information utilisable pour prédire les cours, est contenue dans les cours actuels et donc pas besoin d'étudier l'historique des cours. La stationnarité suppose que le processus engendrant les variations des cours reste le même au cours du temps. Enfin, la distribution normale des variations a trait au fait que la plupart des phénomènes observés oscillent autour de la moyenne, les probabilités d'écart diminuent de manière exponentielle à mesure que l'on s'éloigne de la moyenne. La vision gaussienne traditionnelle du monde commence par se concentrer sur l'ordinaire, puis s'intéresse aux exceptions ou aberrations. Toutefois, Taleb (2008) pense qu'il existe une autre façon de procéder. Pourquoi ne pas prendre l'exceptionnel comme point de départ et considérer l'ordinaire comme secondaire. Si un seul phénomène observé suffit à invalider le système gaussien, des millions d'autres ne confirmeront pas sa validité. La courbe en cloche n'autorise pas les écarts importants mais d'autres outils alternatifs, n'interdisent pas les longues périodes de calme plat.

Hasard bénin et hasard sauvage

Dans son livre prophétique « approche fractale des marchés », Mandelbrot nous éclaire sur la nature du risque. Selon l'auteur, les dés et la roulette roulent au hasard mais pas la hausse ou la baisse des actions. En étudiant les cours du coton depuis 1916 jusqu'à 2003, il introduit le hasard sauvage. En effet, « la théorie prédit 6 jours où l'indice varierait de plus de 4,5 %; en réalité, il y en eut 366 ! ». Mandelbrot introduit le hasard sauvage qui appartient au monde de Cauchy alors que hasard bénigne peut être décrit par le monde de Gauss. Pour un archer aux yeux bandés les coups les plus distants sont environ aussi grands que la somme de tous les autres. Un score en archerie bandée ne se stabilise jamais autour d'une moyenne prévisible accompagné de fluctuations cohérentes : les erreurs ne convergent pas et ont une espérance infinie et une variance infinie. La densité de probabilité de Cauchy est pourtant bien plus simple $\frac{1}{(1+x^2)\pi}$ par rapport à celle de Gauss $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Son graphe s'apparente à une sorte de courbe en cloche mais les queues se prolongent bien plus loin et plus haut. Les extrêmes de gauss et de Cauchy rendent compte de deux visions extrêmes du monde. Dans le premier les changements importants sont le résultat d'un

grand nombre de petits, tandis que dans l'autre les événements isolés et majeurs apparaissent anormalement importants.

Taleb, disciple de Mandelbrot, dresse un tableau de deux domaines. Le premier est appelé Médiocristan, que la science peut comprendre, l'exception dans le médiocristan est non dominante³. C'est le lieu où l'on doit subir la tyrannie du collectif, du routinier et du prévu. C'est est une province calme et insipide dans laquelle il ne se passe jamais rien. C'est le hasard bénin.

Le second domaine est le domaine complexe nommé l'extrémistan où il y a beaucoup plus de hasard sauvage. C'est le lieu où l'on doit subir la tyrannie du singulier, de l'accidentel, et de l'imprévu. L'extrémistan est le domaine scalable⁴ ou encore une province génératrice de cygnes noirs⁵ et les inégalités sont telles qu'un seul et unique phénomène observé peut avoir un impact disproportionné sur l'agrégat ou le tout⁶.

Amnésie rétrograde aux Cygnes noirs

Taleb pense que nous sommes victimes d'une asymétrie de perception ou une arrogance épistémique dans notre perception des événements aléatoires. En effet, nous nous attribuons nos réussites et incriminons le hasard de nos échecs. Selon l'auteur, nous avons une propension à la surinterprétation et à la surestimation des causes, il s'agit d'une dimension psychologique qu'il nomme « erreur de narrativité ». Qui plus est, le signe noir est laissé de côté quand on essaye de simplifier et en ce faisant le monde paraîtra moins aléatoire ! Cette cécité aux cygnes noirs provient également de notre « platonité » ou notre tendance à nous concentrer sur les formes pures et clairement définies. Ceci nous fait croire que nous comprenons plus de choses que ça ne l'est réellement, et c'est ce que Hayek qualifie de scientisme. Nous apprenons par la répétition au détriment des événements qui ne sont jamais arrivés auparavant. La vie réelle est beaucoup trop compliquée pour être reproduite par des modèles mathématiques. Taleb suggère d'étudier l'incertitude intense et inexplorée qui sévit sur les marchés et qui nous donne une véritable leçon d'humilité pour acquérir des connaissances sur la nature du hasard. Ainsi, pour prendre une

³ Un exemple simple pourrait illustrer cette idée : aucune journée ne peut changer mon poids ou ma taille de façon dramatique.

⁴ Selon Taleb (2008), une activité professionnelle scalable est non rémunérée sur une base horaire (sans plafonnement visible). Par contre, l'espérance de vie n'est pas scalable puisque plus on vieillit, moins on a de chance de vivre. Pour plus de détail voir Finance le nouveau paradigme de Herlin (2010).

⁵ « des événements hautement improbables et lourds de conséquences ».

⁶ Bill Gates est plus riche qu'un milliard de gens pauvres

décision, on a besoin de se concentrer sur ses conséquences (que l'on peut connaître) plutôt que sur sa probabilité (que l'on ne peut pas connaître) est l'idée centrale de l'incertitude.

Loi normale vs loi de puissance

Les lois de puissance avaient été détectées par Vilfredo Pareto, qui s'appliquaient à la répartition des revenus. Il a regroupé les gens par tranches de revenus, et pour chaque tranche, a compté leur nombre et a ensuite tracé le résultat. Une droite à la place de la courbe en cloche apparaît. Les données qui varient selon une loi de puissance ont cette particularité bien commode de tracer une ligne droite oblique. La pente de la droite est également la puissance ou l'exposant de la loi de puissance⁷. La formule de Pareto s'écrit comme suit : $P(u) = (u/m)^{-\alpha}$ et permet de connaître la proportion des individus qui gagnent plus qu'un certain niveau de revenu u . m étant le revenu moyen. Le α permet de quantifier le caractère inéquitable de la société. Il est estimé à $-3/2$. Puis en 1940, Zipf, un chercheur à Harvard étudiait certaines propriétés linguistiques, mit en évidence la régularité empirique. En effet, la diction est également régit par une loi de puissance. C'est-à-dire que plus on emploie un mot, moins on aura du mal à l'employer encore.

Pour Taleb les phénomènes physiques (taille, poids) relèvent de la loi normale, tandis que les phénomènes immatériels et virtuels (vente de livres, prix d'une action, etc) relèvent des lois de puissance. Herlin (2010) stipule que tout ce qui est scalable relève des lois de puissance.

la loi d'échelle appliquée aux prix financiers, signifie que les variations de grandes amplitudes sont aussi fréquentes que celles de petites amplitudes. Ce fait entre en contradiction complète avec la loi normale où le retour à la moyenne est assuré. De fait, le cours d'un actif financier peut être relativement stable pendant une période avant de faire un saut de grande amplitude et retrouver ensuite un régime calme, avant un autre saut. La notion d'équilibre est ponctuelle et relative.

A l'instar de Pareto, Mandelbrot a dessiné un diagramme pour les cours de coton. Chaque type de cours considéré formait une ligne droite. Les variations de cours n'obéissaient pas à Bachelier.

Nous nous proposons donc dans une première étape de vérifier l'adéquation des lois de puissance aux rentabilités des indices boursiers tunisiens. Nous avons choisis de travailler sur les indices afin d'éliminer le risque spécifique.

⁷: $y = ax^k$ où a est une constante dite constante de proportionnalité et k est l'exposant d'échelle.

- si $k < 2$, l'écartype n'existe pas, il est infini;

- si $k < 1$, la moyenne n'existe pas.

Si l'on veut déterminer la loi mathématique d'un ensemble de données expérimentales, il faut les reporter sur un graphique logarithmique: si l'on obtient une droite, cela signifie que nous sommes face à une loi de puissance (et la pente de la droite est l'exposant k)

Présentation des données

Nous avons recueillis les données relatives à tous les indices cotés sur la BVMT. La période d'observation est hétérogène et est fonction de la disponibilité des données. Le tableau 1 présente les statistiques descriptives. Seuls deux indices ont une rentabilité négative à savoir l'indice des assurances et l'indice des bâtiments et matériaux de construction. Seuls l'indice des banques, l'indice des sociétés financières et des services financiers avec le Tunindex ont une médiane positive. Le coefficient de variation montre que l'indice agro-alimentaire et boissons est l'indice le moins risqué suivi par l'indice des biens de consommation. L'indice des bâtiments et matériaux de construction est le plus risqué. Tous les skewness sont différents de zéro. Certains indices présentent un skewness négatif ce qui signifie que la partie gauche de la fonction de densité est supérieure à celle de droite. De plus, tous les kurtosis sont supérieurs à trois. Ceci plaide en faveur de l'existence de queues épaisses. La statistique de Jarque Bera suit un khi deux à deux degré de liberté et est significative pour tous les indices. La normalité des rentabilités est rejetée. Ce résultat peut être révélateur d'une non linéarité des rendements. Reste maintenant à savoir si les lois de puissance permettent réellement de mieux décrire les rentabilités des indices tunisiens.

Tableau1 : Ce tableau récapitule les statistiques descriptives relatives à l'ensemble des indices cotés sur la BVMT. Pour chaque indice, la moyenne, la médiane, l'écartype, le coefficient de variation, la skewness, le kurtosis ainsi que la statistique de Jarque Bera JB sont calculés.

Indices ⁸	Début de la période d'étude	N	mean%	p50 %	sd%	cv	skewness	kurtosis	JB
tunin~20	02/01/2012	994	0,01232	-0,00794	0,49259	39,98	-0,4109589	10,23158	2193,897*
tunindex	30/05/2008	1879	0,02848	0,02630	0,60177	21,13	-0,823666	15,44873	12345,39*

⁸Caractérisation des indices cotés sur la Bourse de Tunis :

Tunindex : 78 titres cotés, Tunindex 20: les 20 plus grands titres en terme de capitalisation et de liquidité

INAAB: Agro-alimentaire et Boissons, INAUE : Automobile et équipements, INBCO : Biens de consommation, INBMC : Bâtiments et matériaux de construction, INDAS : Indice des assurances, INDBQ : Indices des banques, INDDI : Distribution, INDIN : Industrie, INDMB : Matériaux de base, INDSC : Services aux consommateurs, INDSF : Indices des sociétés financières , INPMP produits ménagers et soins personnels, INSFI indices des services financiers

INSFI	30/05/2008	1879	0,03918	0,03555	0,84821	21,65	-0,3166772	9,518759	3358,349*
inpmp	01/04/2014	437	0,04697	-0,03766	1,23705	26,34	0,6401277	4,447205	67,98*
Indsf	30/05/2008	1879	0,03039	0,02538	0,63732	20,97	-0,641967	14,42799	10353,87*
Indsc	30/05/2008	1879	0,02178	-0,02837	0,86534	39,73	-0,1658611	8,053381	2007,923*
indmb	01/07/2008	1857	0,00340	0,00000	0,86148	253,38	0,2118289	5,530103	509,1977*
Indin	30/05/2008	1879	0,01705	-0,04815	0,98636	57,85	0,2901904	5,524727	525,4224*
Inddi	02/01/2009	1734	0,03484	-0,02947	0,85888	24,65	0,0777195	7,717527	1609,673*
Indbq	30/05/2008	1879	0,02840	0,01395	0,68221	24,02	-0,3778632	12,41748	6988,32*
Indas	03/01/2011	1233	-0,00982	-0,01017	0,94234	-95,96	0,0839409	6,469768	619,9665*
inbmc	30/05/2008	1879	-0,00233	-0,07126	1,13575	-487,45	0,332147	5,733088	619,37*
Inbco	30/05/2008	1879	0,04734	0,00182	0,94911	20,05	0,2206562	7,335655	1486,967*
Inaue	30/05/2008	1879	0,01109	-0,04331	1,27420	114,90	0,1873246	4,605131	212,7033*
Inaab	18/07/2011	1110	0,07507	-0,01499	1,00786	13,43	0,3771506	6,727844	669,0429*

Estimation des paramètres d'une loi stable

Les lois stables s'inspirent des lois de Pareto et ont des queues lourdes. Elles sont caractérisées par leur fonction caractéristique $\varphi_X(t)$, qui n'est autre que l'espérance mathématique (E) et qui dépend de quatre paramètres. Il s'agit d'une transformée de Fourier (TF) de la densité de probabilité f de la loi de probabilité de x .

$$\varphi_X(t) = \int f(x) e^{itx} dx = E(e^{itx}) = \text{TF}(f)$$

$$E(e^{itx}) = i\delta t - \gamma|t|^\alpha [1 + i\beta(t/|t|)\tan(\alpha\pi/2)] \text{ avec } \alpha \in]0; 2[$$

α est l'exposant caractéristique de la loi. C'est le paramètre le plus important qui détermine l'épaisseur des queues. Dans le cadre gaussien, α est égal à 2. Lorsque α est inférieur à 2, la variance est infinie. β est la skewness. Le paramètre de décalage est δ et le paramètre d'échelle est γ . Ce dernier détermine l'intensité globale des probabilités. L'espérance est infinie si α est inférieur à 1. Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on retrouve la distribution de Cauchy avec des queues très épaisses.

L'estimation des paramètres d'une loi stable est désormais possible via plusieurs méthodes présentées dans la littérature. La méthode de McCulloch (1986) est fondée sur les quantiles et

fournit une estimation suite à une lecture dans les tables de DuMouchel (1971) et à travers une interpolation linéaire. Cette méthode est valable pour $\alpha > 0,6$.

$$N_{\alpha} = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}} \quad N_{\beta} = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

$$N_{\sigma} = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma} \hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{N_{\sigma}} \hat{\mu} = \hat{G} - \hat{\beta} \hat{\sigma} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{ avec } \alpha \neq 1$$

$$\hat{\mu} = \hat{G} \quad \text{avec } \alpha = 1$$

Touba (2014) rapporte que la méthode de McCulloch fournit de bons estimateurs des paramètres d'une loi stable et fournit un temps d'exécution rapide. Toutefois, la méthode de maximum de vraisemblance fournit des estimations beaucoup plus précises, surtout de la skewness. Cependant, elle demeure très coûteuse en terme de temps d'exécution.

Dans cet article, nous présentons les paramètres caractéristiques de la loi alpha stable suivant la méthode des quantiles et la méthode de maximum de vraisemblance.

Tableau 2 : Estimations des quatre paramètres d'une loi alpha-stable avec la méthode de McCulloch (panel à gauche) et avec la méthode de maximum de vraisemblance (à droite) pour l'ensemble des indices cotés sur la bourse de Tunis à partir du 30/05/2008 jusqu'au 31/12/2015.

Indice	Méthode McCulloch				Méthode de Maximum de vraisemblance			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$
Tunindex20	1.675	0.329	0.0026854879	-0.000148968	1.7115656341	0.2865543898	0.0027290367	0.00010476
Tunindex	1.609	0.101	0.0027042887	0.0004394086	1.5859327929	0.0689828751	0.0026845506	0.00053541
INSFI	1.526	0.162	0.0040188245	0.0003586248	1.5747983094	0.1201042291	0.0041552486	0.00045957
INPMP	1.323	0.171	0.0058901936	-0.000581409	1.750890852	0.740673282	0.007743681	-0.0014586
INDSF	1.574	0.046	0.002901858	0.0004329911	1.716474	-0,0000188	0,0031034	0,00018027
INDSC	1.435	0.118	.0041802333	-0.000382192	1.5742754633	0.1575372953	0.0045189269	-0.0001623
INDMB	1.62	0,078	0.004959324	-0.000817252	1.7775194425	0.1233013573	0.0052967332	-0.0002085
INDIN	1.496	0.253	0.0051286644	-0.000610566	1.5709542829	0.2553230975	0.0052473973	-0.0004033
INDDI	1.5	0.231	0.0043448472	-0.000485483	1.5831666696	0.2385173563	0.0045308676	-0.0002591
INDBQ	1.492	0.148	0.0031393027	0.0001787023	1.5890693524	0.1332444334	0.0033367297	0.00039167
INDAS	1.44	-0.093	0.0046997025	0.0001242408	1.7269049825	-0.155265954	0.0053950742	0.00022240
INBMC	1.449	0.231	0.0057302016	-0.000892757	1.5427437939	0.2185473613	0.0059265020	-0.0006726
INBCO	1.387	0.17	0.0042291135	-0.000165857	1.5062088832	0.2110729440	0.0045661944	-0.0001230

INAUE	1.523	0.083	0.0070405451	-0.000289727	1.5747983094	0.1201042291	0.0041552486	0.00045957
INAAB	1.377	0.33	0.0043829189	-0.000581637	1.4439908472	0.3560123228	0.0046064716	-0.0002473

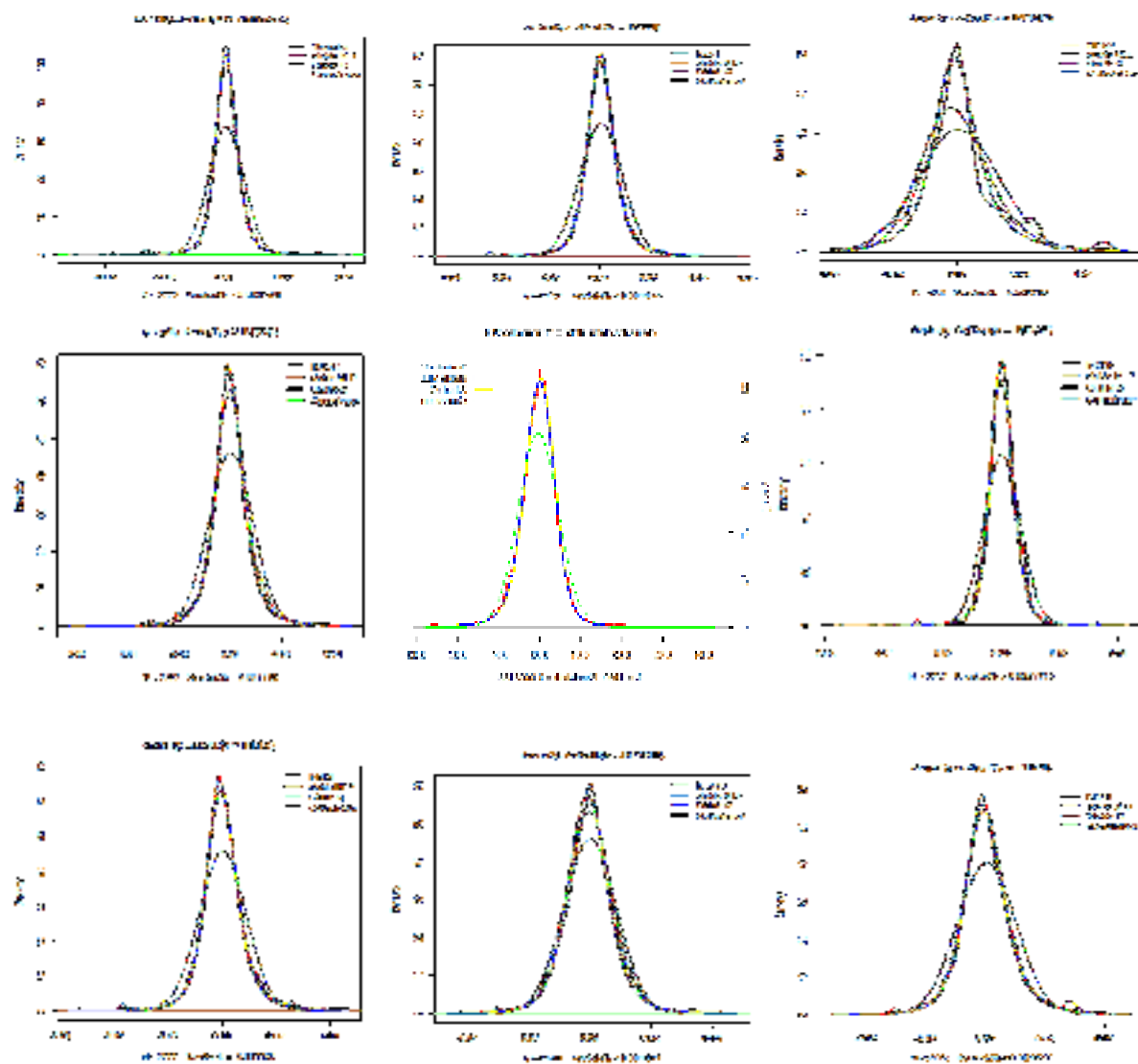
Notons tout d'abord que les deux méthodes permettent d'avoir des résultats satisfaisants. Le paramètre $\hat{\alpha}$ est inférieur à 2 et ce pour tous les indices et quelle que soit la méthode d'estimation retenue. Ceci montre que la variance est infinie et les queues sont épaisses. Nous soulignons également que le paramètre $\hat{\beta}$ est beaucoup plus important lorsqu'il est déterminé par la méthode de maximum de vraisemblance. Dans toutes les estimations, nous avons des résultats différents de 1 et de -1 c.à.d. des situations où l'asymétrie est prononcée à droite ou à gauche. La proximité de zéro montre l'existence de distributions plutôt symétriques. $\hat{\mu}$ peut être interprété comme la moyenne des rentabilités de chaque indice. Afin de vérifier l'adéquation des paramètres de la loi stable estimés par les deux méthodes précédentes, avec la distribution empirique des rentabilités, nous avons mis toutes les trois sur un même graphique. Nous avons également rajouté une distribution normale adéquate à chaque indice. L'examen de la figure 1 montre que les rentabilités de tous les indices sont nettement mieux représentés par une loi stable.

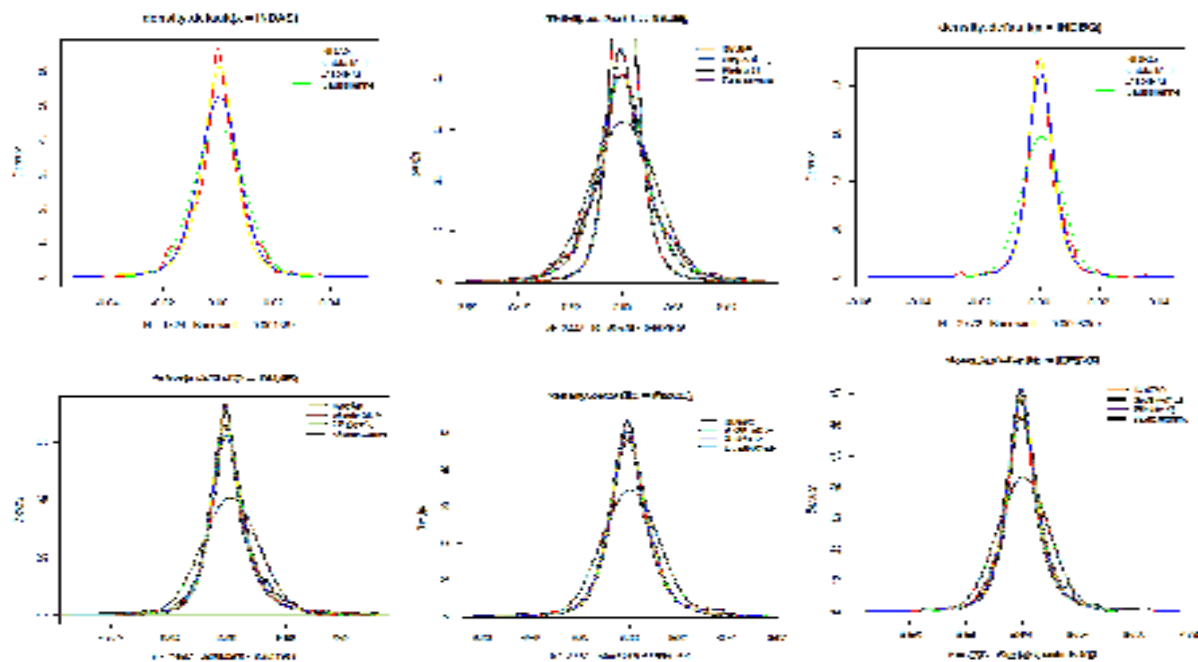
La fractalité

L'univers Euclidien est fait de formes lisses et tout ce qui est rugueux, est laissé de côté. Mandelbrot s'est intéressé à la rugosité. Il a inventé le terme fractal. Du latin fractus désigne la géométrie de ce qui est brisé, cassé. Une fractale est une forme géométrique que l'on peut morceler en plus petites parties rappelant comme en écho la forme du tout à une échelle plus petite. La clé consiste à repérer la régularité dans l'irrégulier. La rugosité selon Mandelbrot n'est pas une imperfection qui perturbe mais c'est l'essence même de bien des objets dans la nature et en économie. La géométrie fractale cherche à déterminer ses schémas itératifs. La variété des fractales est immense mais elles ont toutes quelques traits communs. Tout d'abord, elles sont invariantes d'échelle c.à.d. que les parties répondent en écho au tout selon une formule précise et quantifiable. Les fractales les plus simples sont invariantes d'échelle et sont baptisées auto-similaires. En ce sens, ce qu'elles montrent à un certain grossissement sera similaire pour tous les autres grossissements. De telles fractales sont appelées auto-affines. Si les fractales zooment de manières différentes en des points différents. On les appelle multifractales.

Mandelbrot invente également la dimension fractale, un outil de mesure de la rugosité. Pour la rendre explicite, imaginez que vous souhaitez calculer la longueur d'une cote brisée. Plus vous diminuez la taille de la règle et plus la longueur de la cote augmente sans jamais saturer. Mandelbrot affirme la longueur s'accroît plus rapidement que la diminution des règles. Ce phénomène se mesure par la dimension fractale. En géométrie fractale, la dimension est relative.

Figure 1 : Représentation graphique de la distribution empirique, stable MLE et normale

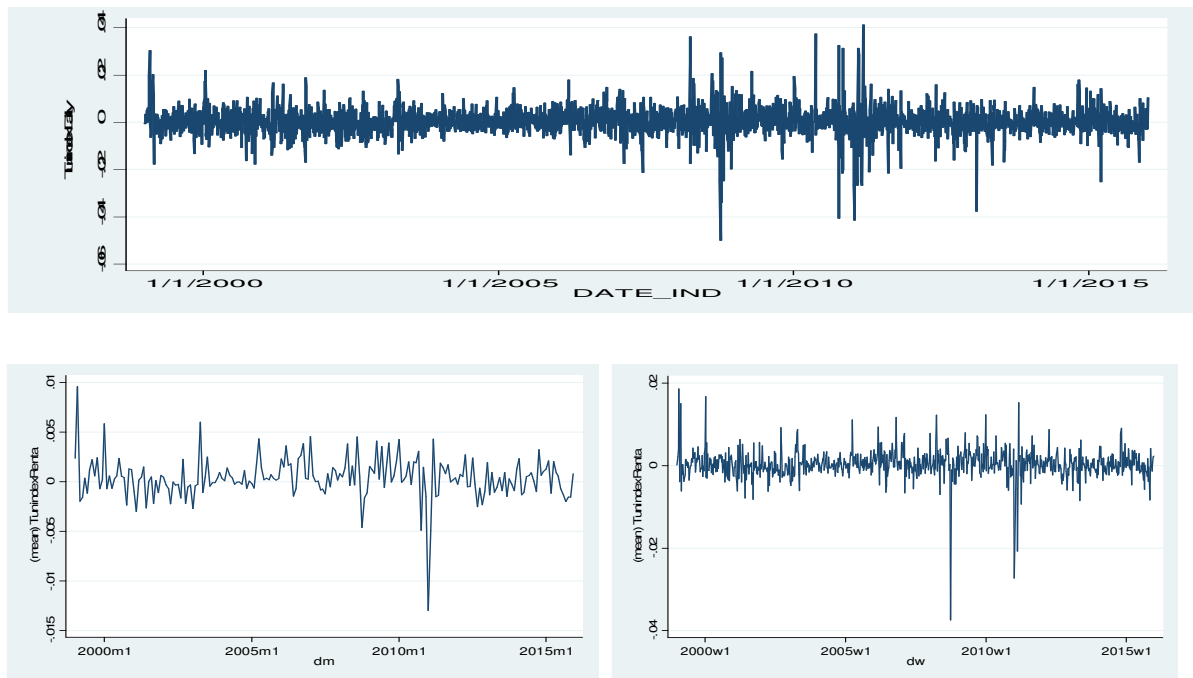




Pour Mandelbrot les fluctuations des cours de coton suivent des lois d'échelles. En ce sens, la proportion entre les variations trop importantes et les plus faibles suit un schéma régulier et ce quelque soit la périodicité observée. Concernant les tendances, les grandes variations arrivent en rafales suivies par de longues séries de petites. Si vous zoomez sur un groupe de variations importantes, vous pouvez vous rendre compte qu'il est à son tour constitué d'amas plus petits. Zoomez encore et vous retrouvez des concentrations encore plus petites. C'est une structure fractale. Les sauts se reproduisent comme en écho.

La figure 2 montre les variations de l'indice Tunindex coté sur la BVMT depuis Janvier 1999 jusqu'au 31/12/2015. En haut, nous avons les variations quotidiennes, suivies des variations hebdomadaires et mensuelles. On remarque bien que les trois graphiques sont similaires malgré la différence d'échelle utilisée. Ainsi, les marchés financiers comme bon nombre d'objets dans la nature sont fractals et sont générés par une même loi ou un même processus.

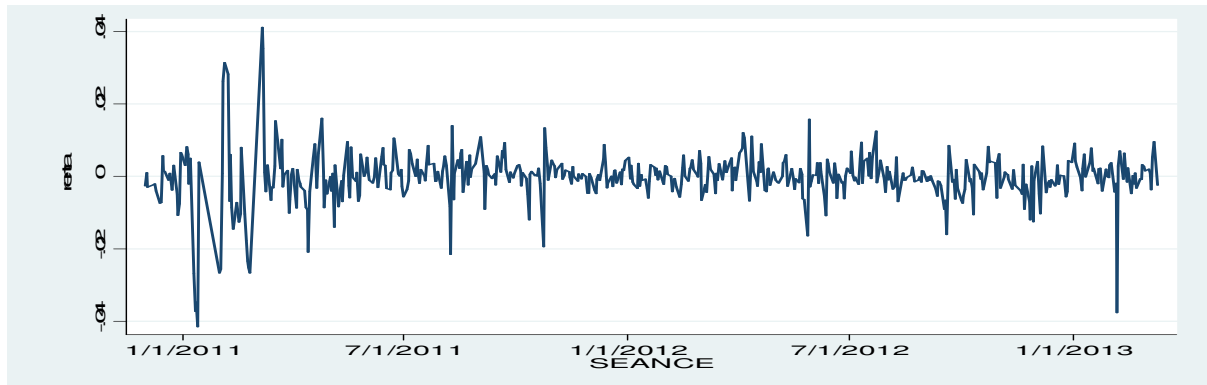
Figure 2 : Représentation des rentabilités quotidiennes, hebdomadaires et mensuelles de l'indice Tunindex depuis Janvier 1999 jusqu'à décembre 2015. La figure permet de mettre en évidence de l'invariabilité d'échelle et de l'autosimilarité.



Effet Noé ou discontinuité des séries et effet Joseph ou persistance

Deux faits sortent de l'observation des graphiques financiers. D'abord, ils fluctuent énormément. Ce sont des fluctuations sauvages. Et puis ils semblent suivre des tendances irrégulières. Nous observons deux formes de variations sauvages que Mandelbrot nomme Noé et Joseph. Il définit l'effet Noé comme le fait d'avoir des distributions avec des queues épaisses qui suivent une loi de puissance. Le krach comme le déluge catastrophique mais passager. La figure ci-après montre l'effet Noé sur la Bourse de Tunis bien visible pour l'indice Tunindex sur la période de la révolution du jasmin janvier 2011 et au début du mois de février 2013 avec l'assassinat de Belaid.

Figure 3 : Mise en évidence de l'effet Noé sur la rentabilité du Tunindex.



L'effet Joseph qu'il découvre à travers l'étude des creux du Nil par Hurst, soulève l'interdépendance des variations des cours ou encore la mémoire longue. La loi Hurst stipule que l'écart entre les crues les plus hautes et les plus basses s'élargissait comme la puissance $\frac{3}{4}$ de l'écart-type. Le passé influence les fluctuations aléatoires du présent. Aucun acte n'est sans conséquence.

Selon Mandelbrot, il existe une relation entre les deux effets. En ce sens, supposons que si les prix connaissent une tendance haussière, au bout d'un moment le marché finira par se calmer et l'interruption peut être brutale. Ainsi, nous aurons un effet Noé produit par un effet Joseph.

Avec la marche aléatoire, la particule brownienne lâchée pendant 1000 secondes ira 100 fois plus loin que celle lâchée pendant 10 secondes. C'est la forme bénigne du hasard. Mais si cette forme aveugle du hasard est fausse, et si la particule se met à vagabonder au-delà des prévisions de règle de la racine carrée du temps. Ainsi, si les cours présentent une forme de dépendance, illustrée par le fait que lorsque le cours prend une direction pendant une séance, il aura une plus grande chance de poursuivre sa lancée le lendemain. La marche aléatoire est ainsi altérée, et le coefficient de Hurst (H) synthétisera cette tendance. Par conséquent, la distance parcourue sera proportionnelle à une certaine puissance du temps écoulé (T^H). H est donc compris entre 0 et 1 et n'est plus égal à 0,5 comme dans le cadre gaussien.

Pour mesurer l'effet Noé et Joseph, de nouveaux outils statistiques sont disponibles. Certains se concentrent sur l'exposant alpha et d'autres sur le H .

Pour mesurer l'exposant de Hurst sur les différentes séries des indices boursiers tunisiens, il faut tout d'abord réaliser les tests de racine unitaire. Pour obtenir des résultats robustes, nous utilisons trois tests. Le premier est le test ADF qui a comme hypothèse nulle l'existence d'une racine unitaire. Le deuxième est le test PP qui permet en plus de tenir compte de l'hétéroscédasticité et de l'autocorrélation. Le troisième est le test KPSS qui a, contrairement aux deux autres, une hypothèse nulle reflétant la stationnarité de la série. Au seuil de 5% les valeurs critiques sont de 0,463 pour le test KPSS et de -2,863 pour le test ADF et PP.

Le tableau 3 montre que toutes les séries, à l'exception de INDAS et INDDI, sont stationnaires, et intégrées d'ordre 1. Par ailleurs, tous ces tests ont été reconduits pour les séries de rentabilité des divers indices qui s'avèrent toutes stationnaires.

Tableau 3 : Ce tableau détaille le test de racine unitaire en niveau et en différence première. Les tests conduits utilisent le logarithme népérien des prix.

Indices	Niveau			Différence première		
	ADF	PP	KPSS	ADF	PP	KPSS
Tunindex	-2.358763	-2.384998	2.854851	-34.14205	-34.67595	0.354549
Tunindex 20	-0.936073	-1.038706	2.130874	-26.28620	-26.75243	0.140267
INAAB	-0.476320	-0.502075	3.473258	-29.58974	-29.62792	0.150098
INAUE	-2.162439	-2.275932	1.011233	-37.61806	-37.64714	0.599594
INBCO	-0.378689	-0.349683	4.657394	-38.60498	-38.60480	0.082899
INBMC	-1.019551	-1.034182	1.694096	-37.20651	-37.12326	0.752172
INDAS	-3.239875	-2.930329	0.448187	-36.62303	-36.69874	0.186386
INDBQ	-2.363379	-2.393542	-2.363379	-34.71036	-34.90900	0.332837
INDDI	-3.452403	-3.556557	1.930410	-36.17168	-36.27111	0.506090
INDIN	-1.764592	-1.823053	2.252216	-35.83434	-35.75089	1.148334
INDMB	-1.223995	-1.137822	2.814168	-40.35090	-40.35047	0.586563
INDSC	-2.511204	-2.586874	1.844532	-39.16714	-39.25711	0.421279
INDSF	-2.473490	-2.517999	2.192190	-34.37745	-34.69023	0.384431
INPMP	-0.958767	-0.920031	2.198112	-22.11572	-22.10255	0.113498
INSFI	-2.579169	-2.741763	2.412601	-37.69046	-37.73666	0.371266

Estimation de l'exposant de Hurst

L'exposant H est utilisé pour mesurer la rugosité d'une série. Plus H est grand, plus la courbe de la série temporelle est lisse et plus des observations de même signe se succèdent.

La mémoire longue signifie que lorsque le retard augmente, la fonction d'autocorrélation décroît lentement. Plusieurs méthodes permettent de mesurer la dépendance à long terme. La méthode la plus utilisée est non paramétrique, baptisée R/S (range over standard deviation). L'idée est simple.

L'effet Joseph dépend de l'ordre précis des événements tandis que l'effet Noé dépend de la taille relative de chaque événement. Redistribuez les données (la série de rentabilité) comme dans un paquet de carte. Tout l'effet Joseph doit disparaître. Seul l'effet Noé reste intact. Pour effectuer le test, il suffit de comparer le paquet avant et après l'avoir battu. S'il y a une différence, alors elle provient de la dépendance à longue portée des données originelles. La séquence précise devrait avoir de l'importance dans les données et on peut mesurer le niveau de cette importance. S'il n'existe aucune différence alors la dépendance est négligeable. R/S ou le rapport étendue écartype, mesure donc l'excursion d'une série de rentabilité. Lorsque H dépasse 0.5, les prix s'éloigneront rapidement de leur point de départ. Si H est plus petit que le brownien 0.5, le prix s'échappera moins.

$$R/S = \frac{\overbrace{\sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n)}^{\text{Max}} - \underbrace{\sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n)}_{\text{Min}}}{\left[\frac{1}{n} \sum_j (r_j - \bar{r}_n)^2 \right]^{1/2}}$$

$H \sim \frac{\log R/S}{\log n}$, n étant le nombre d'observation de la série.

Lo (1991) adresse des critiques à la méthode de R/S. Cette dernière ne dispose pas d'une distribution asymptotique et est incapable de différencier entre le long et le court terme. Lo introduit au niveau du dénominateur une auto covariance en fonction du décalage afin d'apprécier la dualité entre mémoire courte et longue.

D'autres méthodes d'estimations ont été utilisées pour déterminer H. La méthode de la variance agrégée consiste quant à elle à diviser la série en m blocs de taille n/m, k est le numéro séquentiel de chaque bloc. On calcule ensuite la série agrégée :

$$Y_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1+m(k-1)}^{km} Y(t)$$

Suite à quoi on calcule la variance $V(Y_k^{(m)})$ à l'intérieur de chaque bloc et on renouvelle la procédure pour différentes valeurs de m. L'exposant H est déterminé suite à une régression à partir de la relation suivante $V(Y_k^{(m)}) \sim C \cdot m^{2H-2}$.

La méthode de la valeur absolue agrégée est très semblable à celle de la variance agrégée et au lieu de calculer la variance de chaque bloc, on calcule la somme des valeurs absolues. La valeur du coefficient H est donnée par une régression à partir de la relation suivante : $|Y_k^{(m)}| \sim H - 1$

Higuchi (1988) calcule le coefficient de Hurst à partir de la dimension fractale D égale à 2-H.

La méthode des résidus est semblable aux deux précédentes sauf qu'ici on va régresser les séries partielles sur une tendance et le coefficient de Hurst est obtenu à partir de la variance des résidus. Cette dernière est proportionnelle à m^{2H}

Dans un cadre paramétrique, les processus ARFIMA, permettent également de déterminer une estimation de l'exposant de Hurst, puisqu'il existe une relation entre le paramètre d'intégration fractionnaire ou de mémoire d et le coefficient de mémoire H . $d=H-1/2$. Selon Mignon (1998) la méthode de maximum de vraisemblance est la meilleure technique d'estimation. Elle reste cependant très coûteuse en temps d'exécution en raison de l'inversion de la matrice des variances covariances. Toutefois la procédure de Whittle permet une bonne approximation spectrale de la fonction de log vraisemblance.

Plus récemment une nouvelle méthode d'estimation a été introduite par les ondelettes qui permettent une analyse temps fréquence du signal. D'après Kouamo (2011), l'utilisation des scalogrammes, variance empirique des coefficients d'ondelettes s'avère plus efficace que les méthodes de Fourier et très prometteuse pour l'estimation du paramètre de mémoire.

Le tableau 4 suivant rapporte toutes les estimations du coefficient de Hurst sur les séries de rentabilités de l'ensemble des indices cotés sur la BVMT. Les calculs ont été faits à partir du logiciel R.

Les résultats montrent que les estimations sont assez divergentes et ceci s'explique par les différents algorithmes utilisés. Toutefois, tous les coefficients de Hurst sont supérieurs à 0,5 et ce quelque soit la méthode utilisée à l'exception de l'indice INAAB estimé avec la méthode des ondelettes. Les coefficients estimés oscillent entre 0,6 et 0,7 dans la plupart des cas et atteignent rarement 0,8 (l'indice des banques estimé par le modèle ARFIMA). Il est clair que les séries de rentabilité des indices cotés sur la BVMT présentent des phénomènes de persistance ou une probabilité forte qu'un événement soit suivi par un événement similaire, et disposent donc d'une mémoire longue.

Il en ressort que les courbes des séries des rentabilités des indices sont plus lisses que celle de la loi normale mettant en relief un phénomène de clustering de volatilité.

Comme les séries de rentabilité sont persistantes, elles présentent donc un mouvement brownien fractal, ou encore une marche aléatoire biaisée. La présence de bruit dans la série peut être attribuée aux fluctuations économiques et sociales et à la crise politique.

Le degré de corrélation, $C = 2^{2H-1} - 1$ est la mesure de l'effet d'une observation sur les observations qui vont la suivre dans la série temporelle. Pour les séries des rentabilités des indices, il se situe donc entre 0,148 et 0,319. Par ailleurs la dimension fractale, $D=2-H$, facilite l'analyse des

distributions des prix. C'est ainsi que plus la dimension est élevée, plus l'actif connaît un plus faible cumul de rentabilité. La dimension fractale des séries de rentabilités des indices oscille entre 1,3 et 1,4. Ceci montre que les séries sont persistantes et les observations sont positivement corrélées. Ce résultat est similaire à celui de Wen et al (2012) sur la Bourse de Shanghai, Hacinliyan&Kandiran (2015) sur la Bourse Turque.

Non Linéarité et Chaos

Apparue initialement dans le domaine de la météorologie avec Lorenz, dans les années 60, la théorie du chaos est devenue très à la mode dans les années 70 suite à une conférence intitulée « Prédicibilité : le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ? ».

Tableau 4 : Ce tableau rapporte les valeurs de l'exposant de Hurst calculé pour les 15 indices tunisiens. Pour plus de robustesses, différents algorithmes ont été utilisés afin de pouvoir se prononcer sur la persistance de chaque série. La période de l'étude varie suivant la disponibilité des données pour les indices et commence pour la plupart du 31/05/2008 jusqu'au 31/12/2015.

Indice	R/S Rescaled Range Statistic	Corrected R/S	Aggregated variance	aggregated absolute value	Peng Method Residuals	Higuchi's fractal dimension	or Whittle estimator	Wavelet estimator
Tunindex20	0.6490468	0.633526	0.5562097	0.6161379	0.6223015	0.6175695	0.6591454	0.6591454
Tunindex	0.8114782	0.6638367	0.6156460	0.6861521	0.6531251	0.6872774	0.79770114	0.6311485
INSFI	0.7278959	0.6431676	0.5284634	0.6425367	0.6797725	0.6129043	0.77721647	0.571545
INPMP	0.6078035	0.6827694	0.6474867	0.7784614	0.5160254	0.5932179	0.71339940	0.5858119
INDSF	0.8033428	0.6640005	0.5864722	0.6554048	0.6553673	0.664561	0.80727751	0.6077593
INDSC	0.7301262	0.6304419	0.6469264	0.6748424	0.6660278	0.6123395	0.7438263	0.654374
INDMB	0.7119209	0.6217767	0.5446568	0.6005867	0.6021339	0.5318635	0.74416899	0.6090176
INDIN	0.6032249	0.6150507	0.5746134	0.6192639	0.6039186	0.5568754	0.79863832	0.6425527
INDDI	0.5608664	0.6471368	0.6419496	0.6930925	0.6616842	0.6576052	0.77863908	0.6771653
INDBQ	0.7910295	0.646708	0.5732085	0.6267887	0.6503577	0.6480756	0.80573763	0.5866703
INDAS	0.6858951	0.5685628	0.5352282	0.5959913	0.5902887	0.5410782	0.65740282	0.5115013
INBMC	0.7924578	0.566694	0.4799549	0.5518164	0.6209278	0.5222312	0.79173335	0.641944
INBCO	0.6930065	0.6211857	0.575022	0.6290628	0.6067941	0.6458559	0.73449616	0.6275019
INAUE	0.6092548	0.6288755	0.5471342	0.5911533	0.6493879	0.5784051	0.7658069	0.6703701
INAAB	0.6086475	0.6378097	0.5470989	0.6206584	0.5950581	0.6438363	0.7323112	0.4739792

En 1961, Lorenz introduit les données sur son ordinateur, afin de générer des simulations numériques pour la météorologie. Pressé d'aller prendre un café et voulant vérifier certains résultats, il n'introduit que 3 chiffres après la virgule au lieu de 6. En revenant les résultats étaient fort différents. La différence est tellement énorme qu'elle ne peut s'expliquer que par non la linéarité des équations. Etchecopar (2002) affirme que d'infimes différences pouvaient engendrer à la longue des systèmes complètement différents rendant les prévisions à moyen et long terme impossibles. Cette sensibilité aux conditions initiales est caractéristique du chaos. L'image du fameux papillon de Lorenz en est l'illustration schématique de cette sensibilité⁹. Cette figure est également nommée attracteur étrange, qui a justement une structure fractale avec une dimension fractionnaire comprise entre 2 et 3. Il en ressort que deux trajectoires partant de conditions initiales très proches divergent exponentiellement mais restent sur un même attracteur. Ainsi, pour Faggini et Parziale (2016), chaos ne signifie pas désarroi et confusion mais plutôt l'émergence d'un ordre avec une absence de prédiction. La dimension fractale et l'exposant de Lyapunov constituent les deux caractéristiques fondamentales d'un processus chaotique. Leur estimation est désormais possible.

Afin de justifier le recours au calcul du coefficient de Lyapunov, la série doit provenir d'un processus stationnaire et déterministe. Sinon l'interprétation du signe de l'exposant n'est nullement justifiée. Perc (2006) montre que l'étape la plus importante est la détermination de l'espace de plongement. Ces calculs sont également nécessaires pour calculer les mesures invariantes et pour réaliser le test de déterminisme et de stationnarité.

Dans le théorème de plongement, Takens stipule que pour une dimension de plongement suffisamment importante, les vecteurs de retard produisent les mêmes mesures invariantes que le système d'origine.

$$P(t) = (x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau} \dots \dots x_{t+(m-1)\tau})$$

x_t est la valeur de la série temporelle à l'instant t . Le retard de plongement est représenté par τ . Le théorème de plongement (embedding theorem) assure que la connaissance complète du comportement du système est possible à travers la série temporelle de n'importe quelle phase. Il est toutefois nécessaire de déterminer m etc.

Pour se faire plusieurs méthodes sont décrites dans la littérature des séries non linéaires. Dans notre article, le temps de retard τ sera déterminé par la méthode l'information mutuelle alors que m sera déterminé par via la méthode du faux plus proche voisin.

⁹Pour plus de détail, Hayek Kobeissi (2012)

Test BDS (Brock, Dechert et Scheinekmann, 1996)

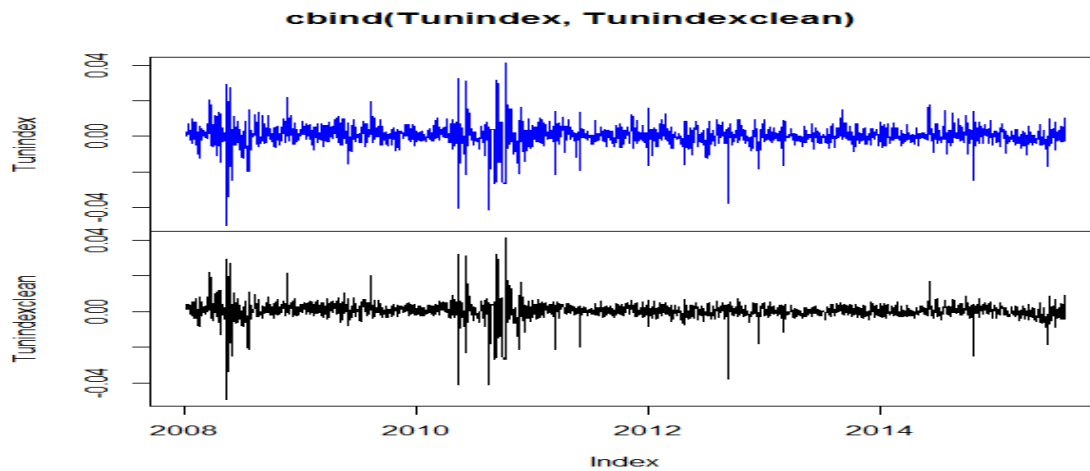
L'introduction des modèles non linéaires dans les séries financières a permis de mieux rendre compte de la dynamique de ces séries et de la possibilité que le passé peut influencer les variations aléatoires d'aujourd'hui. Pour Fenghua et al (2014), la non-linéarité est la source réelle de diversité, de complexité et de variabilité. Selon Riane (2014), les systèmes linéaires sont incompatibles avec les variations réelles. Les variations linéaires permettent à la série d'exploser ou de s'estomper. Or ceci est impossible pour les rentabilités à cause des seuils de réservation à titre indicatif. De plus, les systèmes linéaires ne permettent pas d'expliquer les phénomènes de clustering de volatilité et de changement structurel.

Afin de tester la non linéarité, le test de Brock Dechert et Scheinkman (1994) permet de vérifier si les variables sont indépendamment et identiquement distribués. L'hypothèse nulle stipule que les variables sont i.i.d. Il s'agit donc d'une étape préliminaire dans la recherche d'un processus chaotique déterministe et non linéaire mais semblant aléatoire (Girerd-Potin et Taramasco, 1994). Ce dernier n'a de sens que lorsque l'hypothèse de rentabilité i.i.d. est rejetée. Alexandre (1994) stipule que ce test est également robuste pour détecter la présence de non linéarité dans les séries temporelles.

La série blanchie (sans aucune dépendance linéaire) est examinée sur les dimensions allant de 2 à 5. Le test se fait sur les résidus d'un modèle autorégressif. Les résultats présentés dans le tableau 5 montrent que toutes valeurs sont significatives au seuil de 1% et permettent de rejeter l'hypothèse nulle pour toutes les valeurs e/σ et m . Ceci montre que les séries ne sont pas vraiment aléatoire puisque certains motifs apparaissent plus fréquemment que dans le cadre d'une loi normale. Les séries de rentabilités des indices boursiers tunisiens sont non linéaires. Ce résultat est similaire à celui de Opong et al (1999) sur les bourses britanniques. Il est à noter que la non linéarité est une condition nécessaire mais non suffisante pour l'existence du chaos.

Pour travailler sur le chaos des séries temporelles, il faut tout d'abord s'assurer que la série ne comporte aucune tendance. Or il est connu que les séries financières sont caractérisées par la forte présence du bruit. Il faut enlever le bruit puisqu'il va affecter toutes les mesures invariantes. L'objectif selon Faggini & Parziale (2016), est l'élimination du bruit sans dénaturer la nature du signal. Pour se faire, nous utilisons à l'instar des travaux de Riane (2014), la technique du filtrage par ondelette ou encore la projection locale. La figure 4 ci-après montre la série des rentabilités du Tunindex avant et après le traitement du bruit. La courbe en bleu est relative à la série brute et celle en noir montre une série sans bruit.

Figure 4 : Présentation de la série de rentabilité de l'indice Tunindex débruitée par la technique de la projection locale.



Stationnarité des séries de rentabilités

Les tests classiques de détection de la stationnarité comme le test ADF ou encore KPSS et PP ne sont pas fiables avec des séries non linéaires. Afin de détecter la stationnarité de ces dernières, d'autres tests ont vu le jour. Dans ce qui suit, nous introduisons la fenêtre de Theiler et ce à travers le schéma de séparation espace temps. En effet, la fenêtre de Theiler permet de supprimer tous les points proches par proximité temporelle. C'est le laps de temps à partir duquel les courbes de séparation temps espace sont stables.

La figure 5 ci-après est relative à l'indice Tunindex. Il en ressort que pour le Tunindex, la fenêtre de Theiler est fixée à 2 (2 séances de bourse au maximum) pour que les rentabilités soient stationnalisées¹⁰. Au-delà de ce laps du temps la proximité temporelle n'a plus aucun effet sur la probabilité que deux points soient proches.

Calcul du délai optimal

Un délai optimal doit remplir deux critères. Il doit être suffisamment large pour que la valeur de la variable mesurée à l'instant $t + \tau$, soit pertinente et significativement différente de celle mesurée à l'instant t . Il est à noter qu'un court délai peut toujours être compensé par une dimension m

¹⁰Des figures très semblables et relatives aux autres indices sont disponibles sur demande à l'auteur.

importante. Matjaz (2006) stipule qu'il ne doit pas être au delà du temps nécessaire pour que le système perde de sa mémoire son état d'origine Cette dernière condition nous amène à déterminer τ avec le premier minimum de la fonction d'information .

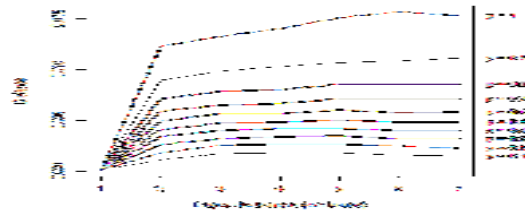
Tableau 5 : Ce tableau rapporte les résultats du test BDS sur les rentabilités journalières cotés sur la Bourse de Tunis depuis le 30/5/2008 jusqu'au 31/12/2015. M est dimension de plongement appelé aussi embedding dimension. La colonne 1 donne la distance e entre deux points. Cette distance est exprimée en fonction de l'écartype empirique des données. Les résultats sont donnés pour e égal à 0.5, 1, 1.5 et 2 écartypes. Les colonnes suivantes donnent les valeurs du test pour l'ensemble des indices considérés. La valeur critique est 1,96 pour un seuil de confiance de 5.

e/σ	m	TUNINDEX	TUNINDEX20	INSFI	INPMP	INDSF	INDSC	INDMB	INDIN	INDDI	INDBQ	INDAS	INBMC	INBCO	INAUE	INAAB
0.5	2	52.090	38.2537	44.327	21.0923	53.0500	46.0098	50.0929	48.873	43.494	53.375	36.143	46.465	44.042	52.986	31.884
0.5	3	60.478	45.5143	52.456	25.9548	62.7717	53.7640	59.8270	58.865	50.96	64.102	45.968	55.762	52.511	66.480	37.201
0.5	4	67.377	49.6650	57.344	29.2104	71.0096	59.5574	65.0450	65.688	55.653	73.190	52.568	62.629	58.176	76.324	40.647
0.5	5	75.853	53.4064	64.113	33.9016	81.2647	67.5897	72.2042	75.055	61.478	84.289	59.895	71.547	65.776	90.509	45.515
1	2	40.711	29.0873	35.763	17.6065	42.1594	38.5147	36.2165	38.080	35.740	43.210	26.268	37.804	35.444	42.123	25.551
1	3	42.392	30.6546	37.672	19.3152	44.4996	40.8932	38.2974	40.292	37.818	46.089	29.462	39.946	37.945	46.404	27.173
1	4	42.882	30.7753	38.512	19.8101	45.8123	41.8807	38.7970	41.171	38.345	47.965	30.729	40.915	38.633	48.510	27.136
1	5	43.759	31.0966	40.011	20.8378	47.5873	43.6975	40.1008	42.918	39.412	50.398	32.184	42.712	39.799	51.466	27.566
1,5	2	37.824	26.0647	34.758	15.1867	38.5835	36.9830	32.7079	37.429	35.467	40.093	23.873	36.989	33.420	38.795	23.808
1,5	3	37.626	26.2321	35.122	15.8948	38.4727	37.6697	32.9433	37.886	35.947	40.105	25.809	37.328	33.977	40.471	24.459
1,5	4	36.387	25.2766	34.386	15.7074	37.4185	37.0044	31.9836	37.189	35.158	39.228	25.893	36.781	33.268	40.602	23.814
1,5	5	35.437	24.4944	34.141	15.7143	36.7758	36.7373	31.5626	36.951	34.615	38.795	26.024	36.644	32.750	40.901	23.234
2	2	37.294	24.4709	35.060	16.9201	37.7135	36.3768	32.2566	38.539	35.761	38.884	23.402	36.928	33.317	36.668	24.142
2	3	36.173	24.1534	34.622	16.6945	36.4477	36.2251	31.8247	38.096	35.332	37.600	24.692	36.542	32.811	37.128	23.684
2	4	34.147	22.9310	33.108	16.1029	34.4726	34.8521	30.2093	36.763	33.909	35.644	24.229	35.487	31.283	36.491	22.586
2	5	32.553	21.8075	32.072	15.6390	32.9988	33.7879	29.0980	35.713	32.662	34.183	23.811	34.618	29.973	35.834	21.589

Figure 5 : Séparation espace temps de l'indice Tunindex.

Cette figure illustre le nombre de jours nécessaires pour que la série soit stationnaire.

Il s'agit de la fenêtre de Theiler.

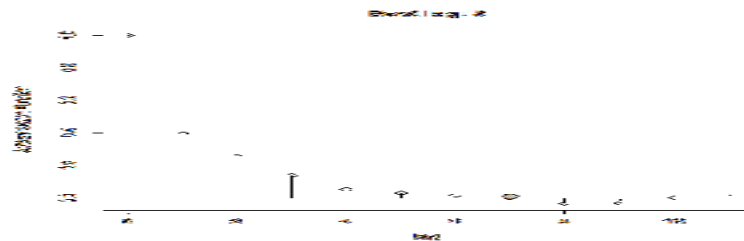


mutuelle (Fraser & Swinney 1986) qui représente le degré de dépendance au sens probabiliste.

Le temps de retard estimé à partir du premier minimum local de l'information mutuelle est donné par l'équation suivante :

$$\tau = \int \int \left(I(\tau) - I(0) \right) \left(\frac{I(\tau) - I(0)}{I(\tau) - I(0)} \right) d\tau$$

Figure 6 : Détermination du retard optimal pour l'indice Tunindex à partir de la méthode de l'information mutuelle.



Dimension de plongement m

Pour déterminer la dimension de plongement m, il faut trouver la dimension à partir de laquelle le nombre de faux voisins est nul. Il faut diminuer le nombre de valeurs proches dans l'espace car proche dans le temps (faux voisins).

La figure 7 ci après, nous permet de conclure que la dimension de plongement est de 9 pour le Tunindex. En effet, il est clair qu'à partir de cette dimension, le pourcentage des faux proches voisins tombe à 0.

Figure 7 : Détermination de la dimension de plongement de l'indice Tunindex par la méthode du faux plus proche voisin



Le calcul a été refait pour tous les autres indices, les résultats trouvés sont récapitulés dans le tableau 6 ci-après.

Une fois la dimension et le retard de plongement calculés, et l'espace de phase reconstruit, nous pouvons calculer l'exposant de Lyapunov.

Calcul de coefficient de Lyapunov

Sandri (1994) déclare que la découverte des systèmes déterministes soulève l'existence de comportements erratiques très semblables au bruit blanc. Les approches statistiques cherchant à détecter ce déterminisme incluent la dimension de plongement et l'exposant de Lyapunov.

L'exposant de Lyapunov donne une idée sur la stabilité ou l'instabilité d'un système dynamique. Il mesure la force de divergence ou de convergence ou encore le taux moyen de séparation des trajectoires de deux points initialement voisins. Lorsque le système est qualifié d'instable, la trajectoire diverge exponentiellement. La différence entre les deux trajectoires évolue au cours du temps selon $e^{\lambda t}$. λ n'est autre que l'exposant de Lyapunov.

Soit $\lambda \approx \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d_0} \right)$ avec d_0 est la distance initiale et $d(t)$ est la distance parcourue après un temps t .

L'exposant est estimé en utilisant la pente obtenue suite à une régression linéaire :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d_0} \right)$$

Il induit ainsi le faible pouvoir prédictif. Si l'exposant maximum de Lyapunov est positif alors le système est qualifié de chaotique. S'il est négatif, le système est régulier. Il y a autant de λ que de dimensions. Ils peuvent être rangés du plus grand au plus petit pour former le spectre de l'exposant de Lyapunov. Ils donnent ainsi une idée sur l'attraction ou l'étirement exercé sur le système par chaque dimension (Alexandre (1994)).

Le tableau suivant regroupe les mesures du délai optimal, de la dimension de plongement ainsi que de l'exposant de Lyapunov pour l'ensemble des indices cotés sur la BVMT.

Les résultats montrent que le plus grand exposant de Lyapunov est positif pour tous les indices, signe d'un attracteur chaotique. Ceci montre la faible prédictibilité du système. On remarque aussi que les indices INBMC et INPMP présentent les exposants les plus élevés et sont donc les plus imprévisibles. Ces résultats sont semblables à ceux trouvés sur le marché Marocain par Riane (2014). Toutefois, la confirmation de l'existence d'un attracteur chaotique n'est possible que suite à la réalisation d'un test de déterminisme.

Tableau 6 : Ce tableau rapporte le retard et la dimension de plongement estimés respectivement par la méthode de l'information mutuelle moyenne et du faux plus proche voisin.

Indice	τ	m	λ	Indice	τ	m	λ
Tunindex	4	9	0.2247885	INDIN	2	11	0.1970612
TUN20	3	9	0.274687	INDBQ	6	11	0.1790775
INSFI	5	9	0.2040836	INDAS	3	13	0.03157461
INPMP	2	9	0.2939102	INBMC	2	11	0.2904533
INDSF	2	9	0.3074937	INBCO	5	9	0.2083435
INDSC	4	9	0.1941999	INAUE	5	10	0.2201911
INDMB	5	8	0.2550163	INAAB	4	15	0.2441523

Test de déterminisme

Ce test nous permet de vérifier l'existence d'une tendance déterministe dans la structure d'une série temporelle. Il permet de déterminer le modèle le plus approprié aux données, à savoir un modèle déterministe chaotique ou un modèle aléatoire irrégulier qui ressemble au chaos mais d'origine stochastique. Il s'agit de vérifier l'existence d'une règle sous jacente au processus dynamique. Nous cherchons à savoir si les images deux points voisins sont elles proches ?

L'approche est basée sur l'observation de la tangente à la trajectoire générée par un système déterministe. Cette dernière est fonction de la position dans l'espace de phase. Selon Xiaohua et al (2016), lorsque le système est déterministe, toutes les tangentes à la trajectoire dans un espace de phase donné possèdent des orientations similaires.

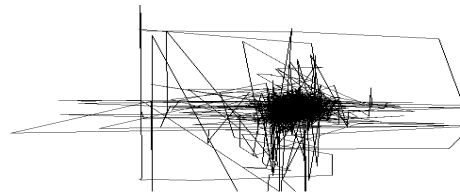
En fait, une série temporelle déterministe trouve toujours ses origines dans un processus déterministe qui peut être décrit par un ensemble d'équation différentielles ordinaires du premier ordre. La solution de ce système existe et elle est unique. Dans ce cadre, Matjaz (2006) affirme que le champ vectoriel à chaque point de l'espace de phase peut être dessiné facilement. L'espace de phase reconstruit doit être divisé en boîtes de même taille et de même dimension de plongement. Chaque fois que la trajectoire passe par la $k^{\text{ème}}$ boîte un vecteur nommé e_i est assigné et sa direction est déterminée à partir des points d'entrée et de sortie dans cette boîte. Ceci est la direction moyenne de la trajectoire à travers la boîte. L'approximation du vecteur v_k dans la $k^{\text{ème}}$ boîte n'est autre que le vecteur moyen de tous les passages selon l'équation suivante :
$$v_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} e_i$$

Avec N_k le nombre de tous les passages dans la $k^{\text{ème}}$ boîte. En reproduisant ceci au niveau de toutes les boîtes, nous obtenons une approximation de la direction du système. Si la série est déterministe le vecteur obtenu doit être composé par des vecteurs unitaires.

MATJAZ (2006) définit une mesure du déterminisme telle que
$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2 - (x_{i+\tau} - \bar{x})^2}{1 - (x_i - \bar{x})^2}$$

A étant le nombre des boîtes occupées. $R_k^m = c_m P^{-\frac{1}{2}}$ avec c_m est une constante qui dépend de la dimension de plongement. Nous avons conduit le test de déterminisme pour l'indice Tunindex en approximant le vecteur dans l'espace reconstruit avec $m=9$ et $\tau=4$. L'attracteur est représenté dans la figure ci-après. Le facteur de déterminisme relatif k est de 0,5524 pour l'indice Tunindex. Il est donc différent de 1. Il s'en suit que la série n'est pas déterministe. Ce test a été reconduit pour l'ensemble des autres indices et les résultats ne confirment nullement l'existence d'un système chaotique. Ceci rend les conclusions tirées par rapport au coefficient de Lyapunov inopportunes.

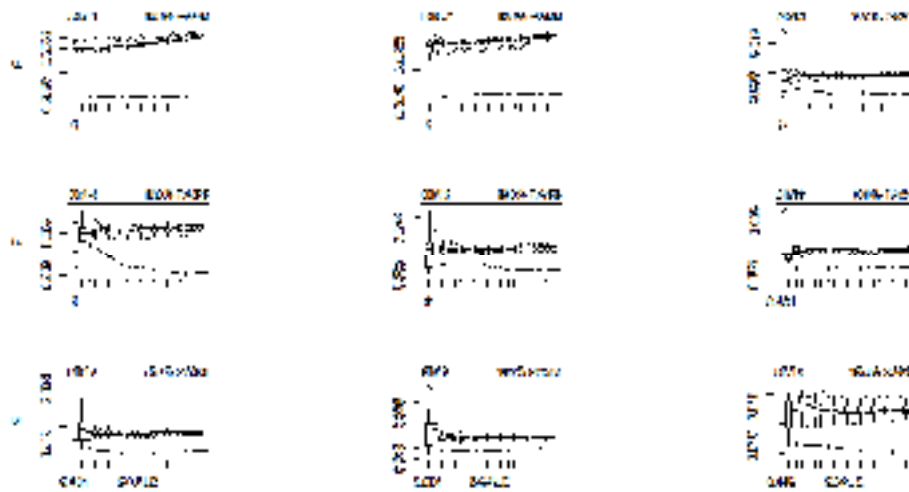
Figure 8 : L'attracteur de l'indice IBVMT.



Le test de déterminisme peut être également effectué selon la méthode de Kaplan (1994). Soit $d_{ij} = |x_i - x_j|$ la distance entre deux points x_i et x_j et $d_{i+1,j+1} = |x_{i+1} - x_{j+1}|$ la distance entre leurs images. $\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} d_{ij}$, $\bar{d}_{\Delta} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} d_{i+1,j+1}$ représente la distance moyenne. L'auteur démontre que lorsque le processus est déterministe $\bar{d}_{\Delta} \rightarrow 0$ alors qu'elle tend vers $\bar{d}$ lorsque le processus est stochastique. Le test repose sur l'identification de séries de substitution ayant les mêmes propriétés que la série originale et calcule la statistique $E = \bar{d}_{\Delta} / \bar{d}$. On procède par la suite à la comparaison entre les résultats de la série originale et des séries reconstruites. Si $\bar{d}_{\Delta} \rightarrow 0$ alors la série est déterministe. La figure ci-après met en abscisses l'échelle r et en ordonnées la statistique E relative à la série originale en points tirés et en boîtes à moustaches pour les séries reconstruites aléatoirement et ce pour des dimensions de plongement allant de 1 à 9. A l'exception de la dimension 3 et 4, nous notons une différence dans la statistique E entre la série originale et les séries de substitution lorsque r tend vers 0. De plus E ne croît pas exponentiellement avec r . Nous rejetons l'hypothèse d'un chaos déterministe pour la série des rentabilités du Tunindex sur la période allant de mai 2008 jusqu'à décembre 2015.¹¹

¹¹ Les résultats des 14 autres indices peuvent être communiqués suite à une demande à l'auteur.

Figure 9 :Test de déterminisme de l'indice BVMT. La statistique E est représentée en pointillé pour la série originale et en box plot pour les séries de substitution.



Conclusion

Dans cet article, nous avons conduit les analyses nécessaires à la détection d'un chaos dans les séries temporelles des rentabilités des indices boursiers tunisiens. Les distributions des rentabilités présentent des queues épaisses et ressemblent plus aux distributions de Levy qu'aux distributions de Gauss. Nous avons calculé les coefficients de Hurst en ayant recours à différents algorithmes et avons confirmé l'existence de phénomènes de persistances pour tous les indices. Les rentabilités présentent une mémoire longue avec une autocorrélation positive montrant que les cours tendent à suivre la même direction que celle prise précédemment. Le test BDS montre que la dynamique des rentabilités est non linéaire, condition nécessaire mais non suffisante à la présence d'un chaos déterministe. L'exposant de Lyapunov est positif pour toutes les séries signe d'une sensibilité aux conditions initiales et d'une divergence exponentielle des trajectoires de deux points initialement proches. Toutefois, nous concluons qu'un exposant de Lyapunov positif n'est certainement pas interprétable comme l'évidence de l'existence d'un chaos. En effet, comme l'ont noté Faggini et Parziale (2016), la théorie du chaos n'a pas le même impact en sciences physiques et en économie. Ceci peut être attribué au fait de l'existence de beaucoup de bruit, de la taille réduite des échantillons et au manque de robustesse des tests de chaos sur les données financières. Ces dernières sont le produit de processus complexes incluant les changements institutionnels et les changements de régimes monétaires sans oublier les crises politiques. La non linéarité et l'instabilité structurelle de ces données nécessite le développement de nouvelles techniques capables de les filtrer.

Bibliographie

Adam Estelle, 2001, L'analyse fractale des marchés financiers, mémoire de Stage effectué à Finama Asset Management

Blank SC, 1991, Chaos in futures markets: a non linear dynamically analysis. J Futures Mark 11, pp.711–728

Bonache Adrien, Moris Karen, May 2011, Chaos dans les ventes de biens à la mode et implication pour le contrôle de gestion. Comptabilités, économie et société, Montpellier, France. pp.cd-rom.

Delignières Didier, 2001, L'analyse des processus stochastiques, working paper Université Montpellier I

DuMouche W. H., 1971, Stable Distributions in Statistical Inference PhD dissertation Department of Statistics Yale University

Etchecopar Philippe, 2002, Cégep de Rimouski, Quelques éléments sur la théorie du chaos, Disponible sur le Site du Saut Quantique, URL [www.apsq.org/sautquantique/telechargement/](http://www.apsq.org/sautquantique/telechargement/chaos.pdf) chaos.pdf

Faggini, M. & Parziale, , 2016, More than 20 years of chaos in economics, Mind & Society volume 15, Issue 1, pp 53-69

Fenghua Wen, Zhong Li, Chaohua Xie and David Shaw, 2014, Study on the fractal and chaotic features of the Shanghai Composite Index, Fractals, Vol. 20, No. 2, 133–140

Hacinliyan A. S., Kandiran E., 2015, Fractal Analysis of Stock Exchange Indices in Turkey, Online Academic Journal of Information Technology, Vol 6 - Num 18

Hayek Kobeissi Yasmine, 2012, Multifractal Financial Markets: An Alternative Approach to Asset and Risk Management, SpringerBriefs in Finance

Hayek Kobeissi Yasmine, 2009, Marchés fractals, stratégies d'investissements, Paris : Connaissances et savoirs.

Herlin Philippe, 2010, *Finance : le nouveau paradigme* Comprendre la finance et l'économie avec Mandelbrot, Taleb, EYROLLES.

Hervé Alexandre, 1994, Le chaos en Finance. Deux mesures de l'exposant de Lyapunov signal de Chaos sur la bourse de Paris, le journal de la société statistique de Paris, tome 135, n°3, PP 45-71.

J.A. Hołyst, M. Żebrowska, K. Urbanowicz, 2001, Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy?, the European Physical Journal B, Volume 20, Number 4, Page 531

Jianbo Gao, Hussain Sultan, Jing Hu, , and Wen-Wen Tung, 2010, Denoising Non linear Time Series by Adaptive Filtering and Wavelet Shrinkage: A Comparison, IEEE signal processing letters, vol. 17, no. 3,

Kaplan T. (1994), « Exceptional Events as Evidence for Determinism », 2008, Physica, 73, pp. 38-48.

Kouamo Olaf, 2011, Analyse des séries chronologiques à mémoire longue dans le domaine des ondelettes, thèse de doctorat TELECOM ParisTech

Kwaku K. Opong, Gwyneth Mulholland , Alan F. Fox , Kambiz Farahman 1999, The behaviour of some UK equity indices: An application of Hurst and BDS tests, *Journal of Empirical Finance* 6, 267_282

Ladislav Kristoufek, 2012, fractal markets hypothesis and the global financial crisis: scaling, investment horizons and liquidity, *Advances in Complex Systems* Vol. 15, No. 6, 1250065 (13 pages)

M. Sewell, 2008, Chaos in financial markets, working paper

Mandelbrot Benoit, 2009, Une approche fractale des marchés Risquer perdre et gagner, Odile Jacob

Matjaz Perc , 2006, introducing nonlinear time series analysis in undergraduate courses, *fizika* 15,2, pp91–112

McCulloch, J., 1986, Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 15, 1109–1136.

McKenzie MD, 2001, Chaotic behavior in national stock market indices. *Global Finance Journal*, 12(1), pp.35–53

Mignon Valérie, 1998, Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst- Applications aux données financières, *économie et prévision*, volume 132, 1, PP. 193-214

Nassim Nicholas Taleb, 2010, *Le Cygne noir la puissance de l'imprévisible*, Les Belles Lettres.

Riane, Nizare. (2015). Etude de la dynamique non-linéaire des rentabilités de la bourse de Casablanca. University Library of Munich, Germany.

Sandri Marco, 1996, Numerical Calculation of Lyapunov Exponents, *The mathematica journal*, volume 6 issue 3

Touba, Sonia (2014), *SUR L'ESTIMATION DES PARAMETRES DES LOIS STABLES*, Université Mohamed Khider Biskra, PhD thesis.

Xiaohua Song, DongxiaoNiu, and Yulin Zhang, 2016, The Chaotic Attractor Analysis of DJIA Based on Manifold Embedding and Laplacian Eigen maps, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2016.